ACCADEMIA NAVALE - Preparazione Prova orale di Matematica

Esercitazione n. 1:
Risolvere la seguente disequazione logaritmica parametrica:

$$\log_2 ax - 3 > \log_2 x^2 - \log_2(2x^2 - ax)$$

RISOLUZIONE:

Condizione iniziale: $\boxed{a \neq 0}$

Infatti, per $a = 0$, l'argomento di $\log_2 ax$ si annulla e la disequazione perde significato (l'argomento di un logaritmo deve essere sempre maggiore di zero). Si noti, invece, che nessun valore di "a" può, da solo, annullare l'argomento di $\log_2(2x^2 - ax)$.

Imponiamo ora le **condizioni di esistenza per i logaritmi** presenti nella disequazione:

$$\begin{cases} ax > 0 & (1) \\ x^2 > 0 & (2) \\ 2x^2 - ax > 0 & (3) \end{cases}$$

Un logaritmo è definito se:
- la sua base è maggiore di 0 e diversa da 1
- il suo argomento è maggiore di 0.

Risolviamo separatamente le disequazioni sopra indicate:

- disequazione (1):

$$ax > 0$$

$$\downarrow$$

La variabile "x" e il parametro "a" devono essere concordi

$\boxed{se\ a < 0 \quad \Rightarrow \quad x < 0}$

$\boxed{se\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0}$

- disequazione (2):

$$\boldsymbol{x^2} > 0$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{x \neq 0}$$

Un quadrato è sempre strettamente positivo, tranne che per $x = 0$.

- disequazione (3):

$$\boldsymbol{2x^2 - ax} > 0$$

$$\downarrow$$

$$x(2x - a) > 0$$

$$(soluzioni\ equazione\ II\ grado\ associata\!: x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{a}{2})$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{se\ a < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 < x_1 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{a}{2} \quad \vee \quad x > 0}$$

$$\boxed{se\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x < 0 \quad \vee \quad x > \frac{a}{2}}$$

Utilizziamo ora le **proprietà dei logaritmi** per semplificare la disequazione fornita dalla traccia del quesito:

$$\boldsymbol{\log_2 ax - 3 > \log_2 x^2 - \log_2(2x^2 - ax)}$$

$$\downarrow$$

$$\log_2 ax + \log_2(2x^2 - ax) - \log_2 x^2 > 3$$

$$\downarrow$$

Poiché deve essere $x \neq 0$ (per l'esistenza dei 3 logaritmi), si può effettuare la semplificazione indicata.

$$\log_2 \frac{a\cancel{x}(2x^2 - ax)}{x^{\cancel{2}}} > 3$$

$log_a b_1 + log_a b_2 = log_a(b_1 \cdot b_2)$

$log_a b_1 - log_a b_2 = log_a(\frac{b_1}{b_2})$

$$\downarrow$$

$$\frac{2ax^2 - a^2x}{x} > 8$$

$log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$\downarrow$$

$$\frac{\boldsymbol{2ax^2 - a^2x - 8x}}{\boldsymbol{x}} > 0 \quad (4)$$

Studiamo separatamente i **segni del numeratore** (N) **e del denominatore** (D) della frazione presente nella disequazione (4):

$$\boxed{\boldsymbol{N} > 0}$$

$$\downarrow$$

$$2ax^2 - a^2x - 8x > 0$$

$$\downarrow$$

$$x(2ax - a^2 - 8) > 0$$

$$(soluzioni\ equazione\ II\ grado\ associata\colon x_1 = 0 \quad \wedge \quad x_2 = \frac{a^2+8}{2a})$$

Si noti che il segno della soluzione x_2 dipende solo dal segno del denominatore, infatti il numeratore è positivo per qualsiasi valore di “a”.

Le **soluzioni della disequazione** $\boldsymbol{2ax^2 - a^2x - 8x} > 0$ sono quindi le seguenti:

$$\boldsymbol{se\ a} < 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 < x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\boldsymbol{a^2+8}}{\boldsymbol{2a}} < \boldsymbol{x} < 0$$

Coefficiente del termine in x^2 e verso della disequazione discordi

$$\boldsymbol{se\ a} > 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} < 0 \ \vee \ \boldsymbol{x} > \frac{\boldsymbol{a^2+8}}{\boldsymbol{2a}}$$

Coefficiente del termine in x^2 e verso della disequazione concordi

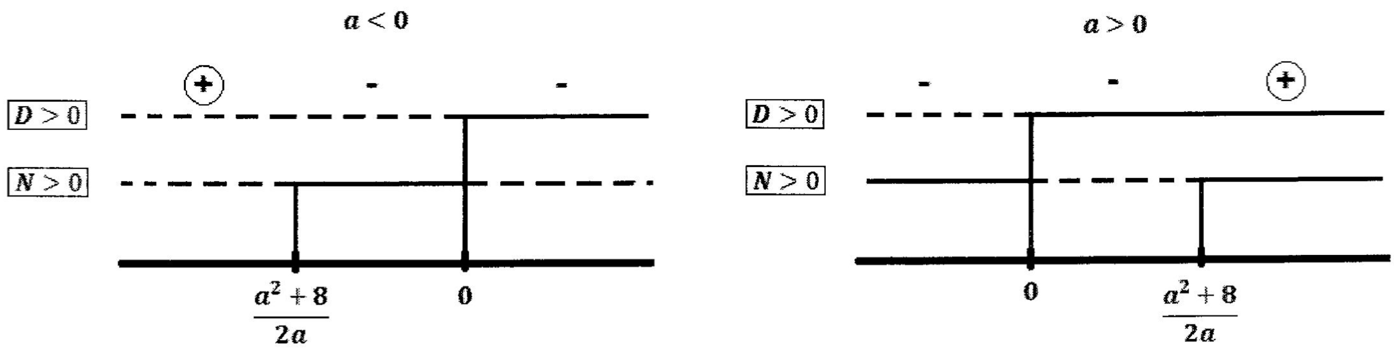
$$\boxed{\boldsymbol{D} > 0}$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{x} > 0$$

E' possibile ora **determinare graficamente il segno della frazione**:

$$\frac{2ax^2 - a^2x - 8x}{x}$$



La disequazione (4) richiede che la **frazione sia positiva**, dunque le soluzioni sono quelle che ricadono negli intervalli contrassegnati con il segno "+":

$$\boxed{se\ a<0 \quad \Rightarrow \quad x<\frac{a^2+8}{2a}}$$

$$\boxed{se\ a>0 \quad \Rightarrow \quad x>\frac{a^2+8}{2a}}$$

Infine, rappresentiamo gli intervalli delle soluzioni delle disequazioni (1), (2), (3) e (4) e tratteggiamo le parti che rappresentano le **soluzioni comuni alle 4 disequazioni** *(N.B.: le soluzioni delle singole disequazioni sono state precedentemente evidenziate racchiudendole in rettangoli)*.

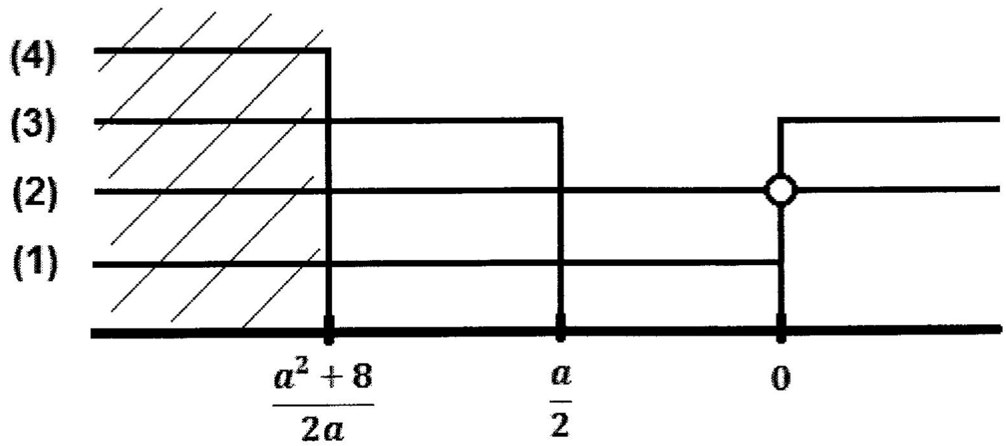
Per confrontare le frazioni $\frac{a^2+8}{2a}$ e $\frac{a}{2}$, si può notare che $\frac{a}{2}$ è equivalente alla frazione $\frac{a^2}{2a}$ (si moltiplica numeratore e denominatore per "a").

Riducendo le due frazioni allo stesso denominatore, otteniamo che:

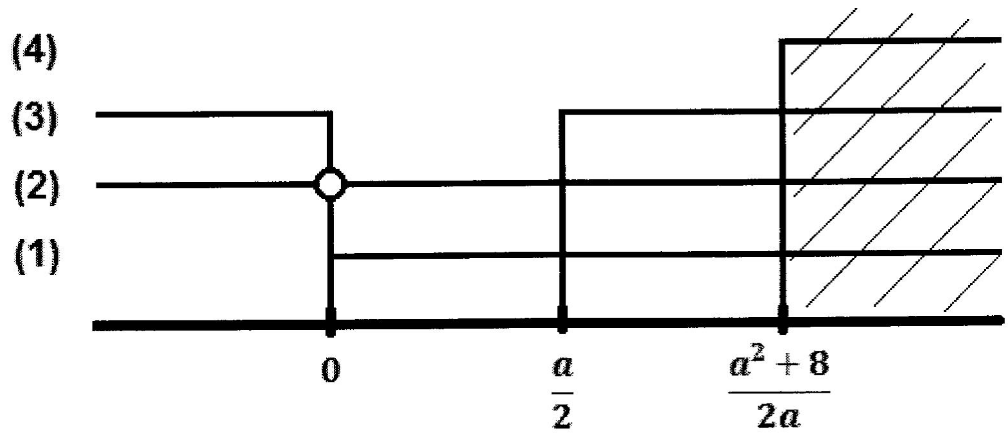
$$se\ a<0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+8}{2a}<\frac{a^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{a^2+8}{2a}<\frac{a}{2}}$$

$$se\ a>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2+8}{2a}>\frac{a^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{a^2+8}{2a}>\frac{a}{2}}$$

$a < 0$



$a > 0$



In conclusione, le **soluzioni della disequazione logaritmica parametrica** sono le seguenti:

$$\boxed{se\ a < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{a^2+8}{2a}}$$

$$\boxed{se\ a = 0 \quad \Rightarrow \quad l'equazione\ perde\ significato}$$

$$\boxed{se\ a > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{a^2+8}{2a}}$$