ACCADEMIA AERONAUTICA - Preparazione Prova orale di Matematica

Esercitazione n. 2:

Verificare la seguente identità goniometrica:

$$\frac{\cos\alpha - 1}{2\cos\alpha} : \frac{\cos 2\alpha - 1}{2\sin 2\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

RISOLUZIONE:

L'**identità goniometrica** è l'uguaglianza fra due espressioni contenenti funzioni goniometriche di uno o più archi, verificata da qualunque valore di quello o quegli archi.

Dobbiamo quindi verificare l'identità proposta **eseguendo in uno dei due membri, o in entrambi, successive trasformazioni in modo da farli diventare uguali**.

Condizione iniziale: $\boxed{\alpha \neq k\frac{\pi}{2}}$

Infatti, prima di verificare l'identità goniometrica, bisogna determinare i valori di α per cui i **denominatori** delle frazioni nel primo membro sono **uguali a zero** e quelli per cui **la tangente** presente nel secondo membro **non è definita**: per tali valori di α l'identità goniometrica perde significato.

1) $\cos\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi}$ (con $k \in \mathbb{Z}$)

2) $\sin 2\alpha \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha \neq k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha \neq k\frac{\pi}{2}}$ (con $k \in \mathbb{Z}$)

$\mathbb{Z}$ è l'insieme dei numeri interi relativi

3) $\tan\frac{\alpha}{2}$ è definita per i seguenti valori di α:

$$\frac{\alpha}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha \neq \pi + 2k\pi} \quad (\text{con } k \in \mathbb{Z})$$

La prima e la terza condizione sono incluse nella seconda, difatti si ha che:

- la condizione 1) esclude dalle soluzioni gli angoli: $\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,$ ecc.

- la condizione 2) esclude dalle soluzioni gli angoli: $0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ 2\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ 3\pi,$ ecc.

- la condizione 3) esclude dalle soluzioni gli angoli: $\pi,\ 3\pi,\ 5\pi,$ ecc.

Dopo aver imposto le condizioni iniziali, torniamo alla risoluzione dell'identità goniometrica e **trasformiamo opportunamente il primo membro** utilizzando le formule di duplicazione e di bisezione:

$$\frac{\cos\alpha - 1}{2\cos\alpha} : \frac{\cos 2\alpha - 1}{2\sin 2\alpha} =$$

*Per dividere una frazione per un'altra bisogna **moltiplicare la prima per l'inversa della seconda**:*

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \bullet \frac{d}{c}$$

$$= \frac{\cos\alpha - 1}{2\cos\alpha} \bullet \frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1} =$$

Formule di duplicazione:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Semplificazioni:

- *+1 e -1 danno come somma 0.*
- *sin α e cos α possono essere semplificati perché già posti diversi da zero.*

$$= \frac{\cos\alpha - 1}{2\cancel{\cos\alpha}} \bullet \frac{4\cancel{\sin\alpha\cos\alpha}}{\cancel{1} - 2\sin^2\alpha - \cancel{1}} =$$

*Si **divide** numeratore e denominatore **per 4***

$$= \frac{\cancel{4}(\cos\alpha - 1)}{-\cancel{4}\sin\alpha} =$$

I relazione fondamentale della goniometria:
$sin^2\,\alpha + cos^2\,\alpha = 1$

da cui si ricava:
$\boldsymbol{sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\,\alpha}}$

$$= -\frac{\cos\alpha - 1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} =$$

Differenza di due quadrati:
$\boldsymbol{a^2 - b^2 =}$
$\boldsymbol{= (a+b)(a-b)}$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}} =$$

Prodotto di due radicali aventi lo stesso indice:

$\boldsymbol{\sqrt[n]{a \bullet b} = \sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b}}$

$$= \frac{1-\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos\alpha} \bullet \sqrt{1-\cos\alpha}} =$$

Moltiplicando un radicale quadratico per se stesso si ottiene il radicando:

$\boldsymbol{\sqrt{a} \bullet \sqrt{a} = a}$

*Si **divide** numeratore e denominatore per* $\boldsymbol{\sqrt{1 - cos\,\alpha}}$

$$= \frac{\sqrt{1-\cos\alpha} \bullet \cancel{\sqrt{1-\cos\alpha}}}{\sqrt{1+\cos\alpha} \bullet \cancel{\sqrt{1-\cos\alpha}}} =$$

Quoziente di due radicali aventi lo stesso indice:

$\boldsymbol{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} =$$

$$= \boldsymbol{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

Formule di bisezione:

$\boldsymbol{sin\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{2}}$

$\boldsymbol{cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 + cos\,\alpha}{2}}$

$\boldsymbol{tan\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,\alpha}{1 + cos\,\alpha}}$

Abbiamo ottenuto **al primo membro una funzione goniometrica identica a quella presente nel secondo membro**: $\boxed{\text{l'identità risulta quindi verificata}}$ per qualsiasi valore di α tranne che per $\alpha = k\frac{\pi}{2}$

